

C O N T E N T S

Chapter 1. 실전 개념 확립	P. 009-026
Chapter 2. 일반 4점 완성	P. 027-078
Chapter 3. 준킬러 정복	P. 079-138
Chapter 4. 킬러 정복	P. 139-192



2

일반 4점 완성



0. 초월함수의 극한의 의미

우리는 수학2에서 다항함수를 분모와 분자로 가지는 분수식의 극한에 대하여 공부했다.

즉, 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최고차항의 계수비가 그 의미이고,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최저차항의 계수비가 그 의미였다.

그러나 초월함수는 최고차항이나 최저차항을 구할 수가 없다.

대신 우리는 다음과 같은 공식으로 초월함수에 관한 극한값을 정리하고 있다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

만약 초월함수가 일종의 다항함수였다면, ~~크런테~~ ~~크것이~~ 실제로 일어났습니다.

상기 모든 초월함수의 상수항은 0이고, 최저차항은 계수가 1인 일차항일 것이다.

실제로 상기 모든 초월함수의 그래프는 $y=x$ 를 접선으로 갖는다는 사실에서 다시 한 번 의미가 통함을 눈치챌 수 있다.

1. 근사와 그 근거

현재 고급수학에서 다루고 있는 테일러급수라는 내용이 있다.

함수 f 에 대하여

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

로 표현될 때, 이것을 함수 $x=0$ 에서 f 의 테일러급수 또는 f 의 매클로린급수라고 한다.

당연히 자세한 내용이나 증명 등은 전혀 공부하지 않아도 된다.

그 의미만을 받아들이자면,

우리가 배우는 초월함수들은 결국 다항함수 꼴로 표현이 가능하다는 것이다.

그리고 삼각함수에 대하여 테일러급수를 적용해본다면,

$0 < r < \frac{\pi}{2}$ 인 실수 r 에 대하여 $(-r, r)$ 에서

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$

라고 할 수 있다.

즉 우리가 배우는 삼각함수의 극한은

테일러급수라는 이론의 1차항 혹은 2차항까지만을 공부하는 것이다.

이를 바탕으로 우리가 배운 삼각함수의 극한을 형태를 약간 바꾸어 학습하자.

$$\sin x \doteq x, \quad \cos x \doteq 1 - \frac{1}{2}x^2 \doteq 1, \quad \tan x \doteq x$$

계산량과 속도를 엄청나게 줄여주는 실전적 이론이다. 이를 ‘근사’라 한다.

2. 근사의 규칙

근사의 규칙 I.

x 가 0으로 수렴할 때의 극한값을 구해야 하면,

$$\sin x \text{를 } x \text{로, } \tan x \text{를 } x \text{로}$$

바꾸어 계산한다.

$\cos x$ 는 1로 바뀌되, 단, $1 - \cos x$ 는 $\frac{1}{2}x^2$ 로 바꾸어 계산한다.

이렇게 두 가지로 나누어 접근하는 것이 싫다면,

$$\cos x \text{를 } 1 - \frac{1}{2}x^2 \text{로}$$

일괄적으로 바꾸어도 된다.

근사의 규칙 II.

곱의 연산을 할 때마다, 먼저 모든 항을 최저차항만 남긴다.

예를 들어 $(x+x^2)(1-\frac{1}{2}x^2)=x \cdot 1=x$ 인 셈이다.

근사의 규칙 I.과 근사의 규칙 II.를 종합하여 생각해보면, 근사의 규칙 I.에서

$\cos x$ 를 1로 혹은 $1 - \frac{1}{2}x^2$ 로 경우를 나눠 근사해도 결과가 같아지는 것을 이해할 수 있다.

근사의 규칙 III.

$$\sec x \text{를 } 1 + \frac{1}{2}x^2 \text{로}$$

$\sec x$ 역시 $\cos x$ 와 같은 방법으로 근사하게 되는데,

이 점만 유독 어려워하는 학생들이 일부 존재하여

예제에서 이런 문제만 나누어 다시 한 번 다룰 것이다.

3. 주의사항

교과서는 모든 학생들이 이해할 수 있는 확실한 공식만을 가르친다.

교과서의 목적상 당연하고 바람직하다고 볼 수 있다.

그러나 일정한 수준 이상의 상위권 학생들이라면

그리고 수능과 같이 시간관리도 매우 중요한 시험을 치러야하는 수험생이라면

위험할 수 있는 부분을 이해하고 그 부분에 주의하는 대신

계산량과 계산시간을 대폭 줄이는 방식을 취하는 것이 합리적일 수 있다.

마치 초등학교 저학년 이하의 학생에게는 부모님 부재시 불을 켜서 요리하는 것을 금지해도
고등학생 이상의 학생에게는 스스로 라면 끓여먹는 정도를 막지 않는 것과 같다.

교과서는 모두의 교과서이지만, 이 책은 최소 이과 중위권 이상을 대상으로 하므로,
불이 나지 않는 법을 알려주고 불을 활용하는 것으로 방향을 잡겠다.

불이 나지 않는 법은 다음과 같다.

서로 다른 두 항을 빼서 더 높은 차수를 구할 때는 근사하지 않는다.

매우 크리티컬한 부분이므로 예를 들어 자세하게 설명한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x} = \frac{x - x}{x} = \frac{0}{x} = 0 \text{ 이지만 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \neq \frac{x - x}{x^3} = \frac{0}{x^3} = 0 \text{ 이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x} = \frac{2x - 2x}{x} = \frac{0}{x} = 0 \text{ 이지만 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3} \neq \frac{2x - 2x}{x^3} = \frac{0}{x^3} = 0 \text{ 이다.}$$

서로 다른 두 항을 빼는 것까지는 문제가 없는데,

서로 상쇄되서 사라지고 결국 더 높은 항을 물을 때는 근사하면 안된다.

아예 두 항을 뺄 때부터 위험한 곳에는 근처에 가지도 않는다는 심정으로
근사를 하지 않는 것도 하나의 방법이다.

정확한 교과서적 풀이는 다음과 같다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3} = \frac{2\sin x(1 - \cos x)}{x^3} = 1$$

물론 근사를 이용해서 풀 수 없는 것은 아니다.

사실 $\sin x$ 를 $x - \frac{1}{3!}x^3$ 으로, $\tan x$ 를 $x + \frac{1}{3}x^3$ 으로 근사하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\left(x + \frac{1}{3}x^3\right) - \left(x - \frac{1}{3!}x^3\right)}{x^3} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3} = \frac{2\left(x - \frac{1}{3!}x^3\right) - \left(2x - \frac{1}{3!}(2x)^3\right)}{x^3} = 1$$

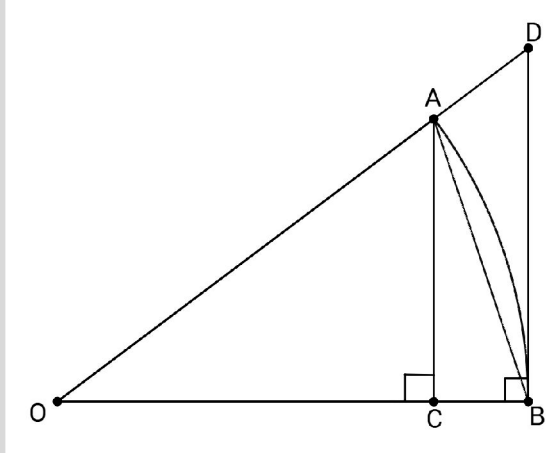
다음과 같은 답을 얻을 수 있다.

그러나 이 경우는 (교육과정 내에서는 1차항까지만 다루므로)
교육과정 내 개념보다 더 많은 것을 알아야하고

이런 식으로 끝없이 확장될 수 있으므로 차라리 이런 경우는 근사를 포기하는 것을 추천한다.
즉, 교과서적인 계산법을 권장한다.

4. 기하에의 최적화

수능에서 이 내용이 기하와 함께 출제되므로
중요한 것은 식을 빨리 계산하는 것만큼이나 기하에 적용을 잘 시키는 것이다.



위와 같은 부채꼴의 수선의 발, 현, 호, 접선의 관계가 항상 출제되는데,
이 부분이 매우 익숙하게 기계적으로 적용이 가능한 수준이어야 한다.

$\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ 이고 $\angle AOB = \theta$ 라 할 때

$\overline{AC} = \sin \theta$, $\overline{AB} = 2 \sin \frac{\theta}{2}$, $\widehat{AB} = \theta$, $\overline{BD} = \tan \theta$, $\overline{AD} = \sec \theta - 1$, $\overline{BC} = 1 - \cos \theta$ 이다.

그리고 이것은 근사를 거쳐

$\overline{AC} \doteq \theta$, $\overline{AB} \doteq \theta$, $\widehat{AB} = \theta$, $\overline{BD} \doteq \theta$ 이고, $\overline{AD} \doteq \frac{1}{2}\theta^2$, $\overline{BC} \doteq \frac{1}{2}\theta^2$ 이다.

$$\overline{AD} \cos \theta = \frac{1}{2}\theta^2 \left(1 - \frac{1}{2}\theta\right)^2 \doteq \frac{1}{2}\theta^2 \cdot 1 = \frac{1}{2}\theta^2 \doteq \overline{BC},$$

$\overline{AD} \sin \theta = \tan \theta - \sin \theta \doteq \frac{1}{2}\theta^3$ 인 것을 통해 다시 한 번 확인할 수 있다.

5. Horizon

$\overline{AC} \simeq \theta$, $\overline{AB} \simeq \theta$ 어떻게 이 둘이 동시에 일어날 수 있는가?

θ 가 0으로 수렴한다는 것은 \overline{OA} 와 \overline{OB} 가 '사실상 평행'을 향해 간다는 뜻이다.

이 것은 수평선과 지평선에서 비슷한 점을 발견할 수 있다.

직선은 아니지만 워낙 커서 직선처럼 보이는 것처럼

평행은 아니지만 워낙 각이 작아 평행처럼 보이는 것이다.

그래서 \overline{OB} 를 반지름이라 하고 θ 가 0으로 수렴할 때, \overline{OA} 를 Horizon이라고 하자.

그렇다면 아래의 그림을 통해 $\overline{AC} \simeq \theta$, $\overline{AB} \simeq \theta$ 임을 받아들일 수 있을 것이다.

